Exercice 1 : **Méthode de Newton pour le calcul approché de $\sqrt{2}$:**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et a un réel tel que $f'(a) \neq 0$. Calculer l'abscisse b du point d'intersection de la tangente issue du point de coordonnées $(a, f(a))$ avec l'axe des abscisses.
2. On suppose dans toute la suite que $f(x) = x^2 - 2$. On définit par récurrence la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, u_{n+1} est la valeur b obtenue en prenant $a = u_n$ dans la méthode du 1).
   Faire un dessin en plaçant u_0, u_1 (avec la construction graphique) et $\sqrt{2}$ sur l'axe des abscisses.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$, et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$ *(procéder par récurrence)*
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, et en déduire une expression de v_n en fonction de v_0 et n.
5. Prouver alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq (2 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})^{2^n}$$
6. En déduire que (u_n) tend vers $\sqrt{2}$.
7. Pour quelle valeur n_0 de n est-on assuré d'avoir $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq 10^{-12}$? Donner alors les valeurs des n_0 premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'une calculatrice ou de Python.
   (la convergence est très rapide par cette méthode)

Exercice 2 : Soit $f : x \to \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer sur quels domaines :
   (a) f est définie
   (b) f est continue
   (c) f est dérivable (et déterminer sa dérivée en simplifiant au maximum son expression)
2. Tracer *l'allure* de son graphe (on ne demande surtout pas un tracé point par point !)

Exercice 3 : *(facultatif)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i}$.