Exercice 1 : Simplifier autant que possible (on suppose $x \neq 0$) :

$$A = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} + \sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 2 : On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ et la suite u définie par la relation de récurrence : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$.
   (b) Montrer que f et $f \circ f$ possèdent un unique point fixe sur $[0,1]$, que l'on notera α.
   (c) Représenter le graphe de f sur $[0,1]$, α et la construction graphique des termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 sur un même dessin. (unité : 8 cm)
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
   (b) Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
   (c) Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers α.
   (d) En déduire que (u_n) converge.
3. (a) Montrer que f est M-lipschitzienne sur $[0,1]$, avec $M \in [0,1[$ (on précisera la valeur de M)
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq M|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq M^n$.
   (d) Déterminer en fonction de M un entier n_0 à partir duquel u_n est une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Exercice 3 :

1. Soient $a < b$ deux nombres réels. On considère deux fonctions f et g définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; ces deux fonctions sont supposées continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, avec : $\forall x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$.
   (a) Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$.
   (b) Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $h = f - \lambda g$ vérifie $h(a) = h(b)$.
   (c) Établir alors que :
   $$\exists c \in]a,b[\ / \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
2. Une application de ce résultat :
   (a) On suppose maintenant que f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = g(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) \neq 0$.
   Montrer que si $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.
   (b) Calculer alors :
   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$
   (c) En déduire que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.