Exercice 1 : L'espace usuel est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère un tétraèdre $ABCD$ où $A(0,2,4)$, $B(2,3,2)$, $C(1,3,3)$ et $D(2,1,4)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère S passant par A, B, C, D. On l'appelle sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la sphère S en A.
3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes réels

$$U_n = (X^2-1)^n \text{ et } P_n = \frac{1}{2^n n!}(U_n)^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n U_n}{dX^n}$$

1. Calculer P_0, P_1 et P_2.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner le degré de P_n et prouver que son coefficient dominant est $\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$.
3. Quelle est la somme des racines de P_n ?
4. (a) En remarquant que $U_n = (X-1)^n(X+1)^n$, montrer à l'aide de la formule de Leibniz que :

   $$P_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$$

   (b) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
5. On fixe dans la suite $n \geq 1$.
   (a) Pour $k \in [[0, n-1]]$, quel est l'ordre de multiplicité de la racine 1 de $(U_n)^{(k)}$? Même question pour -1.
   (b) Rappeler l'énoncé du théorème de Rolle, et montrer que pour $k \in [\![1, n]\!]$, $(U_n)^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$ *(procéder par récurrence sur k).*
   (c) En déduire que P_n admet n racines distinctes dans $]-1,1[$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer). Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$.
6. (a) On pose $I = \int_{-1}^{1} Q(t)P_n(t)\,dt$.

   Montrer que $I = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} Q^{(n)}(t)U_n(t)\,dt$ *(utiliser des intégrations par parties)*

   (b) Que vaut alors I si $\deg(Q) < n$?