Exercice 1 : Soit $n \geq 2$ un nombre entier. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$.
On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme défini par

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,,\ f(\overrightarrow{e}_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \overrightarrow{e}_k$$

1. Préciser la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. Soit D la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{u}_D = \overrightarrow{e}_1 + \dots + \overrightarrow{e}_n$. Calculer $f(\overrightarrow{u}_D)$.
3. On note $g = f + id$.
   (a) Déterminer $\mathrm{Im}(g)$. En déduire la dimension de $H = \mathrm{Ker}(g)$.
   (b) Calculer $f(\overrightarrow{h})$ pour tout vecteur $\overrightarrow{h} \in H$.
4. Montrer que D et H sont supplémentaires.
5. Soit $(\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{n-1})$ une base de H.
   Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u}_D, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{n-1})$
6. Montrer qu'il existe deux réels a_2 et b_2 que l'on déterminera tels que

$$f^2 = a_2 f + b_2 id \text{ où } f^2 = f \circ f$$

   De même montrer que pour tout entier $p \geq 2$ il existe deux réels a_p et b_p que l'on déterminera en fonction de p et n tels que :

$$f^p = a_p f + b_p id \text{ où } f^p = f \circ f^{p-1}$$

Exercice 2 : Soit u la suite réelle définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite u est bien définie.
2. Etudier la monotonie de la suite u. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k. En déduire la limite de $u_{k+1}^2 - u_k^2$ lorsque k tend vers $+\infty$.
4. Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = \dfrac{u_n^2}{4}$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k on a : $v_{k+1} - v_k \geq 1$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n \geq n$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 1$ on a : $v_{k+1} - v_k \leq 1 + \dfrac{1}{k}$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$ on a : $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.
   (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n - v_0 \leq n + \dfrac{1}{v_0} + 1 + \ln n$.
5. Déduire des questions précédentes un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis un équivalent de u_n.

Exercice 3 : Calculer : $\lim\limits_{x \to 1} \left(4\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 1\right)^{\frac{1}{1-x}}$