

Durée : 3h. Calculatrices et téléphones portables interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de l'orthographe et de la précision de la rédaction dans la notation de la copie.

Exercice 1 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos(5x) + 5 \cos(x)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(3x) = 0$.
2. Soient p et q deux nombres réels. Rappeler la formule donnant $\sin(p) + \sin(q)$. Retrouvez-la également en factorisant l'expression $e^{ip} + e^{iq}$.
3. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau des variations de f sur $[0, \pi]$.

Exercice 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + 4i)z + 5i - 5 = 0$.
On notera β et γ ses deux solutions, en tenant compte de $\operatorname{Re}(\beta) > 0$.
2. Soit (E) l'équation $P(z) = 0$ où $P(z) = z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i)$
 - (a) Montrer que (E) a une solution imaginaire pure que l'on déterminera et que l'on notera α .
 - (b) Factoriser alors $P(z)$ par $z - \alpha$, et en déduire que β et γ sont aussi racines de P .
 - (c) On note A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectifs α, β, γ . Montrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en B .

Exercice 3 : Soit h l'application définie par

$$h(z) = i \frac{1+z}{1-z} \text{ pour } z \neq 1$$

Les questions qui suivent sont assez largement indépendantes.

1. Calculer $h(i)$.
2. Déterminer les nombres complexes z tels que $|h(z)| = 1$.
3. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{U} - \{1\}, h(z) \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer les nombres complexes z tels que $h(z) \in \mathbb{R}$.
5. Soit $X \in \mathbb{C}$; l'équation $h(z) = X$ d'inconnue $z \neq 1$ admet-elle toujours des solutions ?

Exercice 4 :

1. (a) Rappeler l'expression développée de $(a + b)^5$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.
(b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(1 + z)^5 = (1 - z)^5$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E) , d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) : (1 + z)^{2n+1} = (1 - z)^{2n+1}$$

- (a) Rappeler la valeur des racines $(2n + 1)^{\text{èmes}}$ de l'unité.
- (b) Résoudre (E) en se ramenant à la question précédente. On donnera les solutions sous forme algébrique.
- (c) En identifiant les résultats obtenus aux questions précédentes, exprimer à l'aide de radicaux les nombres $\tan \frac{\pi}{5}$ et de $\cos \frac{\pi}{5}$.