Durée : 3h. Calculatrices et téléphones portables interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de l'orthographe et de la précision de la rédaction dans la notation de la copie.

Exercice 1 :

1. Montrer que la fonction $G : x \mapsto 2 \arctan(e^x)$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$
2. Dresser le tableau de variations et tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$
3. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(E) : \operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = -\operatorname{ch}(x)$$

4. Montrer que les points à tangente horizontale des courbes intégrales de (E) sont sur une courbe Γ dont on précisera une équation cartésienne.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. On va montrer que : $\forall x \geq 0, f(x) = \arctan(x)$ par deux méthodes différentes :
 - (a) en dérivant f et en simplifiant l'expression obtenue (justifier d'abord la dérivabilité de f sur un domaine à préciser).
 - (b) en posant $x = \tan(\theta)$ où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
3. Tracer l'allure de la courbe de f .
4. f est-elle dérivable en 0 ? (justifier par un calcul)

Exercice 3 : On veut trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$(E) \forall x > 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Soit f une fonction dérivable vérifiant l'équation (E).
Montrer que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer qu'alors f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $x^2 y'' + y = 0$.
3. Sait-on résoudre l'équation différentielle précédente ? (Expliquez)
4. On pose : $z(t) = f(e^t)$. Démontrer que z est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que z est une solution de l'équation différentielle : (F) $y'' - y' + y = 0$. La résoudre, et en déduire z .
6. En déduire la forme que doit prendre la fonction f .
7. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).