Durée : 3h. Calculatrices et téléphones portables interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de l'orthographe et de la précision de la rédaction dans la notation de la copie.

Exercice 1 :

On considère dans cet exercice la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

1. (a) Écrire une fonction Python `terme()` qui renvoie, pour un nombre entier `n` donné en paramètre, la valeur du terme d'ordre `n` de la suite u définie ci-dessus.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de u_n en fonction de n.
   On va essayer dans la suite de retrouver ce résultat par une méthode utilisant des matrices.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice à préciser.
3. En déduire X_n en fonction de A, n et X_0.
4. (a) On pose $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer B^n pour tout nombre entier $n \geq 2$.

   (b) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Retrouver alors le résultat de la question 1b.

Exercice 2 :

On considère dans cet exercice la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'inconnues (x, y, z) : $AX = X$.

   (b) Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ est-ce que le système $AX = \lambda X$ admet une solution (x, y, z) non nulle ?

2. On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AP = PD$
3. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer son inverse.
4. Détermination du commutant de A :
   on pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ («commutant de A») et $C(D) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / DM = MD\}$

   (a) Montrer que : $M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(D)$

   (b) Montrer que les éléments de $C(D)$ sont exactement les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$
   où $(a, e, i) \in \mathbb{R}^3$.

   (c) En déduire que $C(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de 3 matrices fixes que l'on déterminera.

5. *Question indépendante de la précédente :* Que vaut D^n ? Donner alors A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = I_n$ $(*)$.

1. Quelle propriété intéressante vérifie ce type de matrices ?
2. Dans le cas où $n = 2$, montrer que les seules matrices à vérifier la relation $(*)$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.