Durée : 3h. Calculatrices et téléphones portables interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de l'orthographe et de la précision de la rédaction dans la notation de la copie.

Exercice 1 :
On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives

$$\mathscr{P} : x+2y-z+1=0 \text{ et } \mathscr{P}' : x-y+2z-2=0$$

1. Montrer que $\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'=\mathscr{D}$ est une droite dont on précisera une représentation paramétrique.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de O sur $\mathscr{D}$.
3. Pour tout nombre réel m on note $\mathscr{P}_m$ l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation
$$\mathscr{P}_m : (x+2y-z+1)+m(x-y+2z-2)=0$$
Justifier que pour tout $m\in\mathbb{R}$, $\mathscr{P}_m$ est un plan.
4. Pour $m\in\mathbb{R}$, que dire de la droite $\mathscr{D}$ vis-à-vis du plan $\mathscr{P}_m$?
5. Parmi les plans $\mathscr{P}_m$ y en a-t-il un qui soit perpendiculaire à $\mathscr{P}$?
6. On considère l'ensemble Σ d'équation
$$\Sigma : x^2+y^2+z^2+2x-4y=0$$
Vérifier que Σ est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
7. Justifier que $\mathscr{C}=\mathscr{P}_{\frac{1}{2}}\cap\Sigma$ est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon r.
8. Déterminer un système d'équations de *la* droite tangente à $\mathscr{C}$ en O.
9. Déterminer les éventuelles valeurs de m pour lesquelles $\mathscr{P}_m$ est tangent à Σ.

Exercice 2 : On se place dans le plan usuel rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soient a un réel strictement positif, et I le point de coordonnées $(a,0)$.

1. Sur quelle courbe $\mathscr{C}$ va se déplacer le point C de coordonnées cartésiennes $(a+a\cos\theta, a\sin\theta)$?
2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T_θ à $\mathscr{C}$ au point C.
3. Calculer les coordonnées cartésiennes du projeté orthogonal H_θ de O sur la droite T_θ.
4. Montrer que le lieu décrit par le point H_θ a comme équation polaire $\rho(\theta)=a(1+\cos\theta)$. On note Γ cette courbe.
5. Placer quelques points de la courbe Γ. Pouvez-vous en deviner l'allure ?
6. Soit A le point tel que I soit le milieu de $[OA]$. Déterminer les coordonnées cartésiennes du centre de gravité G du triangle $AH_\theta H_{\theta+\pi}$. Sur quelle courbe se déplace-t-il quand θ varie dans $\mathbb{R}$?

Exercice 3 : Soit E un ensemble à n éléments.

1. Calculer $S=\sum\limits_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p}$.
2. Soit X une partie de E à p éléments. Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?
3. Combien y a-t-il de couples (X,Y) formés de parties disjointes de E ?