

Durée : 4h. Calculatrices et téléphones portables interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de l'orthographe et de la précision de la rédaction dans la notation de la copie.

Exercice 1 :

On considère l'application φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\text{intégrale non calculable de façon exacte !})$$

1. (a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Quel est son sens de variation sur $\mathbb{R}_+$?
 (b) A l'aide d'un changement de variables, déterminer la parité de φ .
2. (a) Montrer que

$$\forall u \in]-\infty, 1[, 1 + u \leq e^u \leq \frac{1}{1-u}.$$

Pour montrer la deuxième inégalité on pourra étudier la fonction définie par $h(u) = (1-u)e^u - 1$

- (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, \sqrt{n}], \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$$

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

- (a) Calculer A_0, A_1, A_2 .
- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \leq A_n$ et $A_n > 0$.
- (c) Établir la relation : $\forall n \geq 2, nA_n = (n-1)A_{n-2}$. (utiliser une intégration par parties)
- (d) En déduire que la suite $(nA_n A_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ?
- (e) En remarquant que l'on a : $\forall n \geq 2, A_n \leq A_{n-1} \leq A_{n-2}$, prouver que A_n est équivalent à A_{n-1} quand n tend vers $+\infty$.
 En déduire que $A_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ et $C_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$.

- (a) Montrer que : $B_n \leq \varphi(\sqrt{n}) \leq C_n$.
- (b) En utilisant le changement de variables $x = \sqrt{n} \tan t$ dans C_n , montrer que :

$$\forall n \geq 2, C_n \leq \sqrt{n} A_{2n-2}$$

A l'aide d'un changement de variable similaire, montrer que : $B_n = \sqrt{n} A_{2n+1}$.

- (c) En déduire (*proprement !*) la limite de $\varphi(\sqrt{n})$ quand n tend vers $+\infty$.
- (d) Montrer que φ admet une limite en $+\infty$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

Exercice 2 : Soit ABC un triangle du plan, et un nombre réel $r \in]0, 1[$. On considère les points A' , B' et C' définis

$$\text{par : } \begin{cases} \overrightarrow{AA'} = r \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BB'} = r \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CC'} = r \overrightarrow{CA} \end{cases}$$

Dans le plan complexe, on note a , b et c les affixes des points respectifs A , B , C , et a' , b' et c' les affixes des points respectifs A' , B' , C' .

On note E le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$.

1. Montrer que $a' = (1-r)a + rb$. Déterminer de même les affixes b' et c' des points B' et C' en fonction de a , b , c et r .

2. Démontrer que les triangles $A'B'C'$ et ABC ont le même centre de gravité G d'affixe g .

3. Montrer que l'application $\varphi : (a, b, c) \mapsto (a', b', c')$ est un endomorphisme de E .

4. On pose $T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $T' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ où j est le nombre complexe $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

(a) Déterminer la matrice M telle que $T' = MT$.

Exprimer la matrice M à l'aide des matrices I et J .

(b) Déterminer la matrice D diagonale telle que $JP = PD$.

(c) Exprimer P^2 en fonction de K . Calculer K^2 , et en déduire que P est inversible. Donner P^{-1} en fonction de P et de K .

(d) Déterminer la matrice Δ diagonale telle que $M = P\Delta P^{-1}$.

(e) En déduire l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de M^n en fonction de P , P^{-1} , Δ et n .

(f) Montrer que les ensembles $E_1 = \left\{ (x, y, z) \in E / J \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$, $E_j = \left\{ (x, y, z) \in E / J \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$

et $E_{j^2} = \left\{ (x, y, z) \in E / J \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = j^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$ sont des droites vectorielles de E dont on précisera un vecteur directeur de première coordonnée égale à 1.

5. On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $T_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = MT_n$.

(a) Exprimer T_n en fonction de M , n et T_0 .

(b) Montrer que $|1 - r + rj| < 1$ et $|1 - r + rj^2| < 1$.

(c) On dit qu'une suite de matrices converge si les suites respectives de chaque coefficient matriciel convergent.

La matrice ayant pour coefficients les limites respectives de ces suites est dite la limite de la suite de matrices.

Quelle est la limite de la suite $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$?

(d) On admet que si les suites de matrices (A_n) et (B_n) convergent vers A et B respectivement, alors les produits $(A_n \times B_n)$ convergent vers $A \times B$.

Quelle est la limite de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

(e) Quel résultat géométrique peut-on en tirer?

Exercice 3 : On se place dans un plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et le point $A(a, 0)$ où $a \in]1, +\infty[$.

Définition 1 | On dit qu'un point $M(x, y)$ du cercle $\mathcal{C}$ est visible du point A lorsque pour tout $M'(x', y')$, point d'intersection du cercle et de la droite (AM) , on a : $x' \leq x$.

On cherche l'ensemble des points du cercle $\mathcal{C}$ visibles du point A (au sens de la définition précédente!). Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $M(\theta)$ le point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

De plus, on pose : $\omega = \arccos\left(\frac{1}{a}\right)$.

1. (a) Justifier l'existence de ω et que $\omega \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
 (b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OM(\omega)}$ et $\overrightarrow{AM(\omega)}$ en fonction de a .
 (c) Établir que la droite $(AM(\omega))$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x) - a}$.
 (a) Montrer que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^1$.
 (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $f'(x)$ en fonction de a et de $\cos(x)$.
 (c) En déduire que f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \omega]$ et est strictement croissante sur l'intervalle $[\omega, \pi]$.
3. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A coupant le cercle $\mathcal{C}$ en au moins un point.
 Montrer que $\mathcal{D}$ admet une équation de la forme : $y = m(x - a)$ où $m \in \mathbb{R}$.
4. Soit m et θ deux réels. On note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation : $y = m(x - a)$.
 Montrer que : $M(\theta) \in \mathcal{D}_m$ si et seulement si $m = f(\theta)$.
5. Montrer que les points $M(0)$ et $M(\pi)$ sont sur la droite $\mathcal{D}_0$, puis après avoir comparé leurs abscisses, que le point $M(0)$ est visible du point A alors que le point $M(\pi)$ ne l'est pas.
6. Soit deux réels θ_1 et θ_2 tels que : $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ et $f(\theta_1) = f(\theta_2)$.
 (a) Montrer que les points $A, M(\theta_1)$ et $M(\theta_2)$ sont alignés.
 (b) Prouver que le point $M(\theta_1)$ est visible du point A alors que le point $M(\theta_2)$ ne l'est pas.
 (c) Justifier brièvement que : $\theta_1 < \omega < \theta_2$.
7. Soit $\theta \in [0, \pi]$. Établir que :
 (a) si $\theta \leq \omega$, alors le point $M(\theta)$ est visible du point A .
 (b) si $\theta > \omega$, alors le point $M(\theta)$ n'est pas visible du point A .