

Durée : 3h. Calculatrices et téléphones portables interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de l'orthographe et de la précision de la rédaction dans la notation de la copie.

Exercice 1 :

Partie I : Étude d'endomorphismes tels que $u \circ u = 0$

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, u un endomorphisme *non nul* de E tel que $u \circ u = 0$, r le rang de u et p la dimension du noyau de u .

1. Ici on prend $n \geq 2$:
 - (a) Montrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.
 - (b) En déduire que : $r \leq \frac{n}{2}$ et $p \geq \frac{n}{2}$.
2. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.
 - (a) Montrer que $r = 1$. Quelle est alors la dimension de $\text{Ker}(u)$?
 - (b) Soit $\vec{k}$ un vecteur de E n'appartenant pas à $\text{Ker}(u)$, et $\vec{i} = u(\vec{k})$.
Justifier l'existence d'un vecteur $\vec{j} \in \text{Ker}(u)$ non colinéaire avec $\vec{i}$,
puis démontrer que $\mathcal{C} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de E .
 - (c) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$.

Partie II : Application sur un exemple

Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $v \circ v = 0$.
2. Déterminer le noyau et l'image de v (préciser une base pour chacun).
3. Trouver une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle v admet pour matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, notée P dans la suite. Déterminer son inverse.
5. Rappeler la formule de changement de base pour l'endomorphisme v (en la traduisant avec les matrices de cet exercice).

Partie III : Un système différentiel

On garde les matrices de la partie précédente.

On considère trois fonctions x , y et z , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$. On veut résoudre le système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) &= -x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) &= -2x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= x(t) - y(t) - z(t) \end{cases} \text{ avec les conditions initiales } x(0) = 1, y(0) = z(0) = 3$$

1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Montrer que (S) est équivalent à $X'(t) = JX(t)$.
2. Soit $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$; prouver que (S) est équivalent à $(S_1) : Y'(t) = TY(t)$.
3. Résoudre alors les équations différentielles donnant x_1, y_1 et z_1 , et en déduire x, y et z en fonction de t .

Exercice 2 :

Soit la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. (a) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
(b) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \sin(x) \leq x$. Quand y-a-t-il égalité ?
(c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers 0.
2. On définit, pour $\alpha \neq 0$ (fixé) la fonction g sur $]0, \pi[$ par $g(x) = (\sin x)^\alpha - x^\alpha$.
(a) A l'aide d'un développement limité, donner un équivalent en 0 de $g(x)$.
(b) Comment choisir α pour que g admette une limite finie non nulle en 0 ? On prendra cette valeur dans la suite de l'exercice.
(c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = g(u_n) = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$. Montrer que (v_n) converge vers une limite à préciser.
(d) En admettant que $\frac{v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}}{n}$ converge vers la même limite que celle de (v_n) (c'est le théorème de Césaro), prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) = \frac{1}{3}$$

- (e) (on peut admettre le résultat précédent pour traiter cette question)

En déduire que : $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.