

Durée : 3h. Calculatrices et téléphones portables interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de l'orthographe et de la précision de la rédaction dans la notation de la copie.

Exercice 1 : Dans cet exercice N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur lance une pièce équilibrée. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents.

(On peut appeler X_N le «nombre de changements» au cours des N premiers lancers).

Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donné successivement : «Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile» alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} et 8^{ème} lancers).

1. Déterminer $X_N(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3 .
3. Montrer que $P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $P(X_N = 1) = 2(N-1) \left(\frac{1}{2}\right)^N$.
4. (a) Justifier que pour tout entier k de $\{0, \dots, N-1\}$: $P(X_{N+1} = k | X_N = k) = \frac{1}{2}$
(b) En déduire que pour tout entier k de $\{0, \dots, N-1\}$:

$$P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \frac{1}{2} P(X_N = k).$$

- (c) En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que $P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}$.
- (d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
5. (a) Montrer grâce aux résultats 4(b) et 4(c) que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.
(b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $B(N-1, \frac{1}{2})$.
En déduire l'espérance et la variance de X_N .

Exercice 2 : Dans un questionnaire de type QCM de 20 questions, pour chaque question on donne 3 réponses possibles (dont 0 à 3 peuvent être justes).

Le barème de notation consiste à donner pour chaque question 1 point lorsqu'il n'y a aucune erreur, 0,5 point lorsqu'il y a une erreur, et 0 point s'il y a deux erreurs ou plus.

Un candidat joueur décide de répondre totalement au hasard. Quelle note moyenne obtiendra-t-il ?

Exercice 3 :

Soit la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!}$.

- Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n .
- Rappeler le développement limité à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$
 - En déduire un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- La série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est-elle convergente ?
- Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?
On désignera dans ce qui suit, et sous réserve d'existence, par ℓ la limite de la suite (u_n) .
- Donner en fonction de ℓ et n un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- En admettant que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 = \pi$ donner la valeur de ℓ et retrouver la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exercice 4 :

Si pour tout entier n on pose $A_n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$, on dit que la suite de matrices à coefficients réels $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ quand $n \rightarrow \infty$ si et seulement si les quatre suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont pour limites respectives a, b, c et d .

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on notera $\exp(A)$ la matrice limite, si elle existe, de la suite de matrices définie par $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$

(A^0 désignant la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

- Rappeler l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégrale.
 - Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ (en majorant l'écart entre les deux)
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
 - Calculer A^2, A^3 puis A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. (donner ses 4 coefficients)
 - En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$ pour $n \in \mathbb{N}$; prouver alors que $\exp(A)$ existe, et donner son expression.
 - Montrer que $\exp(A)$ est inversible, et déterminer son inverse.
 - [Hors-barème] Soit m un entier relatif. Montrer que $\exp(mA)$ existe, et que $\exp(mA) = [\exp(A)]^m$.